Ecuaciones en derivadas parciales

Ejercicios del Tema V

Ejercicio 1. Calcular la solución del problema de Laplace:

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0 \ , & x^2+y^2<1, \\ u(x,y) = f(x,y) \ , & x^2+y^2=1, \end{array}$$

donde:

a) $f(x,y) = x^4$,

b) $f(x,y) = xy + y^2$,

Ejercicio 2. Aplicando el método de separación de variables, resolver el problema:

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0, & 0<x<\pi,\ 0<y<1, \\ u(0,y)=0,\ u(\pi,y)=0, & 0<y<1, \\ u(x,0)=0,\ u(x,1)=f(x), & 0<x<\pi. \end{array}$$

donde $f \in C^1[0,\pi]$ satisface la condición de compatibilidad $f(0)=f(\pi)=0$.

Ejercicio 3. Aplicando el método de separación de variables, resolver el problema:

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0, & 0<x<\pi,\ 0<y<1, \\ u_x(0,y)=0,\ u_x(\pi,y)=0, & 0<y<1, \\ u(x,0)=f(x),\ u(x,1)=g(x), & 0<x<\pi. \end{array}$$

donde $f, g \in C^1[0,\pi]$ satisfacen las condiciones de compatibilidad $f'(0) = f'(\pi) = g'(0) = g'(\pi) = 0$.

Ejercicio 4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio regular y acotado, y consideremos el siguiente problema no lineal:

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x) = u(x)^3 \ , & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 \ , & x \in \partial\Omega. \end{array}$$

Pruébese que la única solución es $u(x)=0$.

Ejercicio 5. Sea $a \in \mathbb{R}$, $f \in C\left(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B(0,1)}\right)$ y $g \in C(\partial B(0,1))$. Demuéstrese que el siguiente problema tiene, a lo sumo, una solución:

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x) = f(x) \ , & \text{si } |x| > 1, \\ u(x,y,z) = g(x) \ , & \text{si } |x| = 1 \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = a. & \end{array}$$

Encontrar la única solución en el caso siguiente:

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y,z) = \dfrac{6}{(x^2+y^2+z^2)^2} \ , & \text{si } x^2+y^2+z^2 > 1, \\ u(x,y,z) = 3 \ , & \text{si } x^2+y^2+z^2 = 1 \\ \lim_{|(x,y,z)|\to\infty} u(x,y,z) = 0. & \end{array}$$

Sugerencia: Buscar soluciones con simetría radial.

Ejercicio 6. Dado $0 < a < 1$, consideremos el problema:

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x) = 0, & \text{si } |x| \in (a,1), \\ u(x) = 0 \ , & \text{si } |x| = 1 \\ u(x) = 1 \ , & \text{si } |x| = a. \end{array}$$

1. Probar que la única solución del problema es radial.
2. Calcular dicha solución $u_a(x)$.
3. Probar que si $0 < a < b < 1$, entonces $u_b(x) > u_a(x)$ para todo $b \le |x| < 1$.
4. Probar que el problema:

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x) = 0, & \text{si } x \in B(0,1) - \{0\}, \\ u(x) = 0 \ , & \text{si } |x| = 1 \\ u(0) = 1. & \end{array}$$

   no admite solución.

Ejercicio 7. valores propios radiales de la bola unidad. Calcular para qué valores $\lambda \in \mathbb{R}$ el problema siguiente admite soluciones radiales no triviales.

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y,z) = \lambda u(x,y,z) \ , & x^2+y^2+z^2 < 1, \\ u(x,y,z) = 0 \ , & x^2+y^2+z^2 = 1. \end{array}$$

Calcular dichas soluciones.
Sugerencia: Estudiar qué ecuación resuelve $ru(r)$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Ejercicio 8. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función subarmónica y acotada superiormente. Demostrar que u es constante. Dar algún ejemplo de una función subarmónica y acotada superiormente no constante en dimensión mayor que 2.

Sugerencia: recordar la demostración de la desigualdad de las medias esféricas.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función C^1 y acotada, y consideremos la ecuación de Poisson

$$\Delta u(x) = f(x). \tag{1}$$

1. Comprobar que (1) tiene, como mucho, una solución acotada en $\mathbb{R}^N$ (salvo adición de constantes).
2. Demostrar que si $N \geq 3$ y f tiene soporte compacto, entonces existe una solución acotada de (1).
3. Dar contraejemplos que demuestren si $N = 2$ o bien f no es de soporte compacto, entonces el problema (1) puede no tener ninguna solución acotada.